TORNEO DE LAS CUENCAS 2013
Segunda Ronda
Primera Prueba Primer Nivel

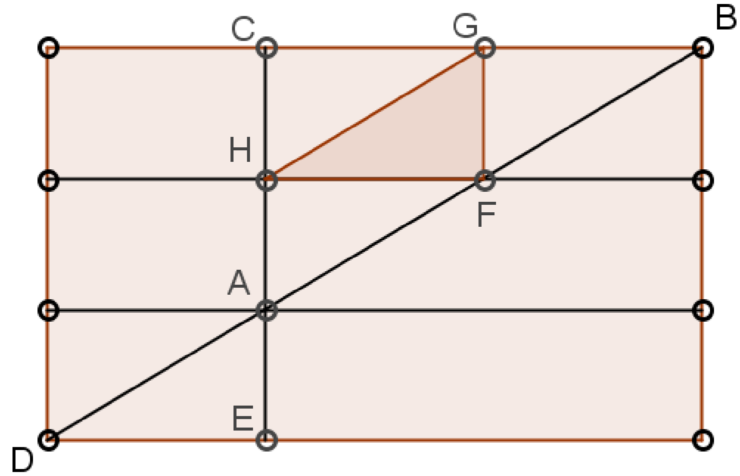
Problema 1- Los cuadraditos de la cuadrícula son de 1 cm por 1 cm. Halla el área del triángulo inscripto.

Solución: El área puede ser calculada por diferencia, área del cuadrado menos las áreas de los triángulos rectángulos:

$$6 \times 6 - \left(\frac{6 \times 5}{2} + \frac{1 \times 3}{2} + \frac{3 \times 6}{2} \right) = \frac{21}{2}$$

Problema 2- En un rectángulo dividido en 3 partes iguales se dibujan dos triángulos como ilustra la figura. Si el perímetro del mayor es $12cm$, calcula el perímetro del triángulo menor.

Solución: Consideremos FGH el triángulo de puntos medios de ABC. El triángulo ABC queda descompuesto en 4 triángulos iguales, motivo por el cuál los puntos F y H deben quedar sobre la recta que divide al rectángulo como se muestra en la figura:



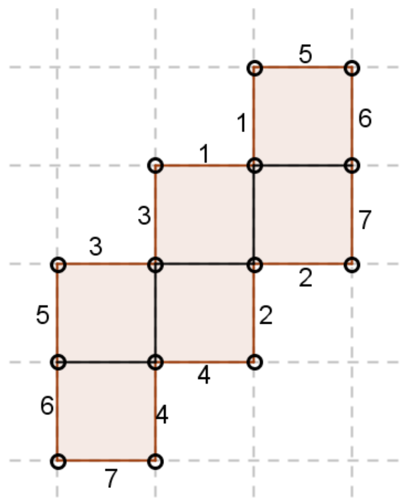
El perímetro de cada uno de estos triángulos es la mitad del perímetro de ABC. Por el teorema de Thales

$$\frac{DA}{AF} = \frac{EA}{AH} = 1$$

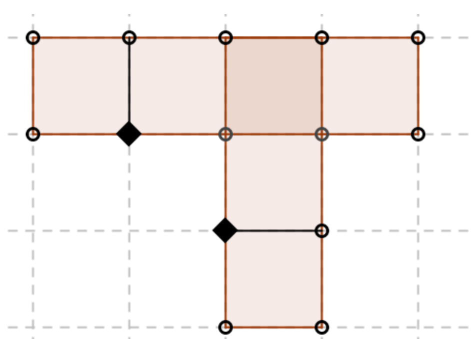
es decir $DA = AF$, con esto, los triángulos EAD y AFH son iguales y ambos tienen el perímetro de $6cm$.

Problema 3- ¿Cuáles de las siguientes figuras se pueden plegar para formar un cubo? En los casos en que puedas formar un cubo, indica cómo pegar las aristas que se corresponden.

Solución: Es importante observar que cada vértice de un cubo está en 3 caras exactamente. En la primer figura hay un punto rodeado por 4 *cuadrados y no es posible plegar esos cuadadrados para que formen las caras de un cubo. Indicamos como plegar, pegando por aristas, la segunda figura para formar un cubo:*



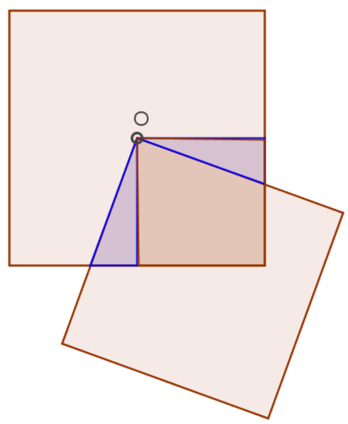
En la tercer figura, al pegar dos caras por sus aristas los puntos destacados quedarán como un vértice de 4 *cuadrados, lo que impide el plegado de la figura para formar un cubo.*



TORNEO DE LAS CUENCAS 2013
Segunda Ronda
Primera Prueba Segundo Nivel

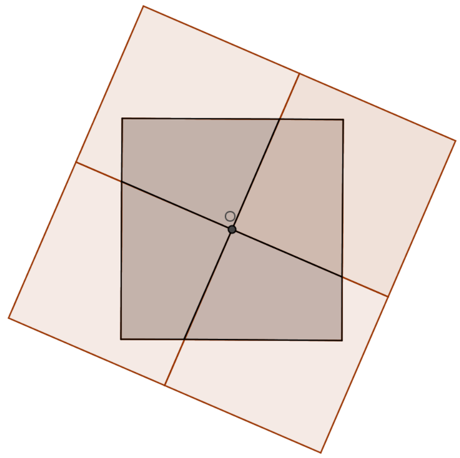
Problema 1- Un vértice de un cuadrado está en el centro O de otro cuadrado de área $8cm^2$ como indica la figura. Calcula el área de la región sombreada, común a ambos cuadrados.

Solución 1: Por el centro O trazamos segmentos paralelos a los lados del cuadrado de área $8cm^2$ para delimitar un cuarto de cuadrado de área $2cm^2$ como se puede ver en la figura:



Los triángulos rectángulos que se forman, tienen el mismo ángulo en el vértice O, pues comparten el mismo complemento, es decir, estos triángulos son iguales ya que tienen un cateto y los ángulos adyacentes respectivamente iguales. El área de la región común a ambos cuadrados es $2cm^2$.

Solución 2: Si ambos cuadrados se rotan $90^o, 180^o$ y 270^o alrededor de O:



La región común a ambos cuadrados y sus rotaciones, descomponen al cuadrado de área $8cm^2$ en 4 figuras iguales, por lo que el área de esta figura es $2cm^2$.

Problema 2- En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $6cm$ y $3cm$, se ha inscripto un cuadrado como se ilustra en la figura. Halla la medida del lado del cuadrado.

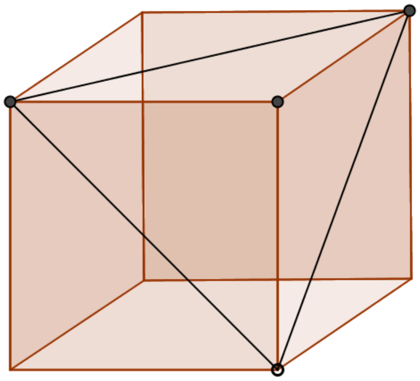
Solución: Los triángulos ABE y AEC tienen la misma altura l sobre el vértice E, igual al lado del cuadado. El área del triángulo es igual a $9cm^2$, pero también es igual a la suma de las áreas de los triangulos ABE y AEC, luego:

$$9 = \frac{6 \times l}{2} + \frac{3 \times l}{2} = \frac{9}{2}l$$

de modo que $l = 2$.

Problema 3- Dos vértices de un cubo se dicen vecinos si son los extremos de una misma arista. Fijando un vértice cualquiera, con sus 3 vértices vecinos se forma un triángulo. Calcula el valor de los ángulos de dicho triángulo.

Solución: Como se puede apreciar en la figura,

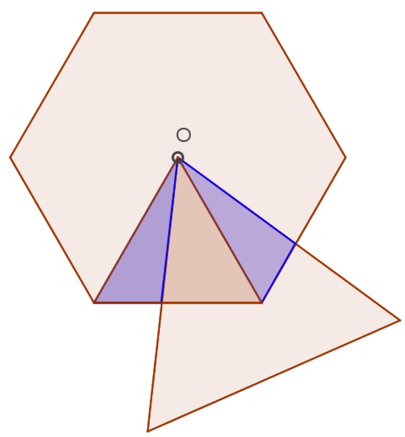


los lados de un triángulo formado por los vértices vecinos a un vértice dado, son diagonales de caras, es decir, se forma un triángulo equilátero y sus ángulos interiores son todos de 60^o.

TORNEO DE LAS CUENCAS 2013
Segunda Ronda
Primera Prueba Tercer Nivel

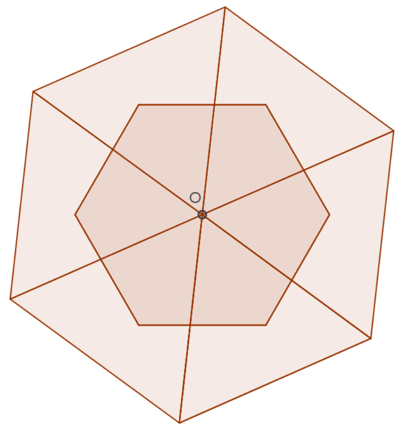
Problema 1- Un triángulo equilátero tiene un vértice en el centro O de un hexágono regular de área $12cm^2$. Calcular el área de la región sombreada, común a ambos polígonos.

Solución 1: Consideramos uno de los 6 *triángulos equiláteros de área* $2cm^2$ *que componen el hexágono como se indica en la figura:*



Se forman 2 *triángulos que tienen el mismo ángulo en el vértice común* O*, pues ambos suman* 60^o *con el ángulo que los separa. También son iguales los ángulos de éstos triángulos que están sobre los vértices del hexágono y son iguales los lados que unen* O *con un vértice del hexágono. Luego estos triángulos son iguales y el área buscada es la misma que la del triángulo equilátero de área* $2cm^2$*.*

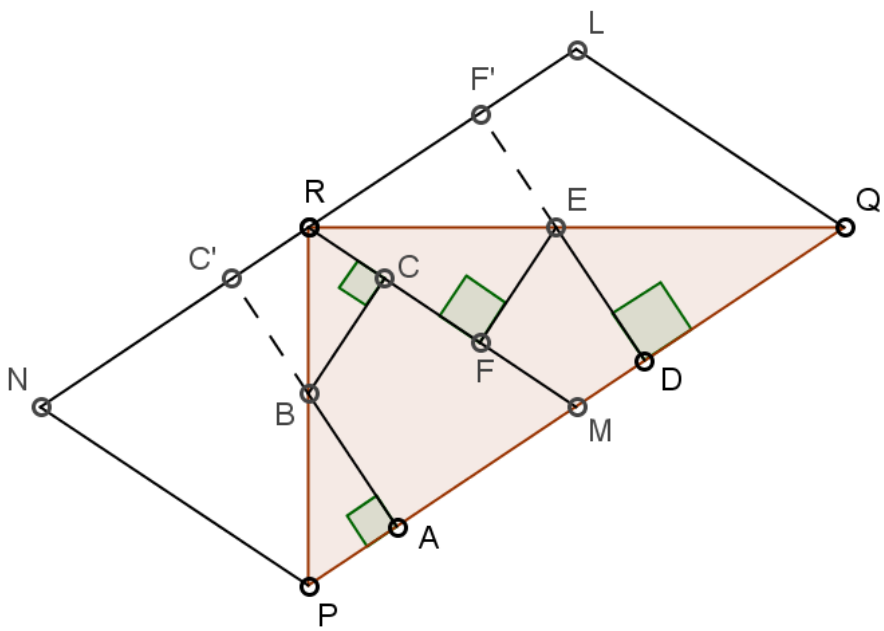
Solución 2: Si ambos, triángulo y hexágono, se rotan $60^o, 120^o, 180^o, 240^o$ *y* 300^o *alrededor del cerntro* O:



La región común a ambos polígonos y sus rotaciones, descomponen al hexágono en 6 figuras iguales, por lo que el área de esta figura es $2cm^2$.

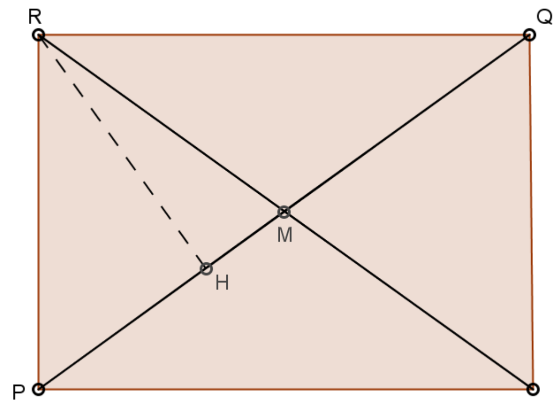
Problema 2- En el plano de una plazoleta con forma de triángulo rectángulo, se aprecian los senderos internos como ilustra la figura, en la cual se han destacado los ángulos rectos y M es el punto medio de la hipotenusa. Si el recorrido por el sendero interno desde A hasta B y desde B hasta C totaliza $45m$. ¿Cuánto totalizará el recorrido por el sendero interno desde D hasta E y desde E hasta F?

Solución 1: Si se refleja el punto M respecto de la recta PR y de la recta RQ

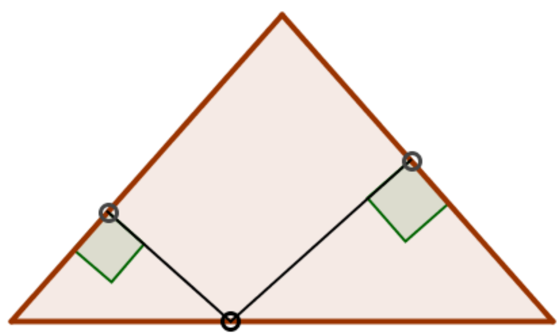


se obtienen los puntos N y L. Los triángulos PMR y RMQ son iosósceles, dado que PQR es la mitad de un rectángulo donde PQ es una diagonal del mismo, de modo que $MP = MQ = MR$. Los rombos $PMRN$ y $MQLR$ son iguales por que comparten el lado MR y los lados PM y MQ están sobre una misma recta. El recorrido $AB+BC$ mide lo mismo que $AB+BC' = AC'$ puesto que A, B y C' están alineados, debido a que $\widehat{PBA} = \widehat{CBR} = \widehat{RBC'}$. Resulta que AC' es la altura del rombo $PMRN$. Análogamente, $DF' = DE + EF' = DE + EF$ es la altura del rombo $MQLR$. Se concluye que ambos recorridos miden lo mismo, es decir $45m$.

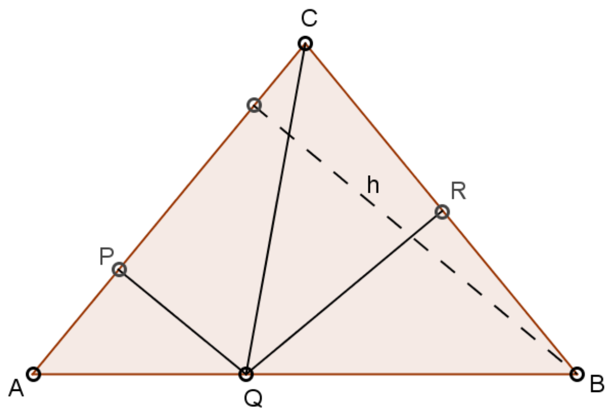
Solución 2: Todo triángulo rectángulo es parte de un rectángulo cuya hipotenusa conicide con una diagonal del rectángulo.



Dado que las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en sus puntos medios, éstas descomponen al rectángulo en 4 triángulos isósceles, iguales de a dos. Los triángulos isósceles PMR y MQR comparten la altura sobre el vértice R. Hacemos notar ahora que, en todo triángulo isósceles un camino como el indicado en la figura:



tiene su longitud igual a la de una altura del tiángulo sobre uno de los lados iguales. En efecto:



El área de ABC es igual a

$$\frac{1}{2}AC \times h$$

donde h es la altura sobre el lado $AC = BC$. El área de ABC es también igual a la suma de las áreas de los triángulos AQC y QBC, es decir

$$\frac{1}{2}AC \times PQ + \frac{1}{2}BC \times RQ = \frac{1}{2}AC \times (PQ + RQ)$$

igualando las expresiones, resulta $PQ + RQ = h$.
Voviendo al problema, los dos caminos tienen la misma longitud que la altura RH compartida por los triángulos isósceles que contienen dichos caminos. En conclusión, ambos recorridos totalizan $45m$.

Problema 3- Se tiene un cubo en el cual se trazan cinco diagonales de algunas de sus caras. Muestra que cualquiera sea la elección de las diagonales, hay dos de ellas que tienen un punto en común.

Solución: El cubo tiene 8 vértices y cada diagonal incluye dos vértices, entonces, si hay 5 diagonales, algún vértice tiene que ser compartido por dos diagonales.